Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise
Esercitazione 10

Esercizio 1 Data la *funzione podio*

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,1) \\ 3 & \text{se } x \in [1,2) \\ 1 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

si determini l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \qquad\qquad x \in [0,3].$$

Esercizio 2 A partire dalla definizione di integrale, si dimostri la catena di disuguaglianze

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \le \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{\sqrt[4]{e}} + 1.$$

Esercizio 3 Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\,dx \qquad \int \frac{1}{\cosh(x)}\,dx \qquad \int x^2 \sin(x)\,dx \qquad \int e^x \arctan(e^x)\,dx$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx \qquad \int x e^{2x} \cos(3x)\,dx \qquad \int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}\,dx \qquad \int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}\,dx \qquad \int \frac{x(x+3)}{x^4-1}\,dx \qquad \int \frac{x-3}{x^4+x^2}\,dx$$

$$\int \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\,dx \qquad \int \frac{x}{x^3-1}\,dx \qquad \int \frac{1}{x^4+1}\,dx \qquad \int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \int \frac{\arctan\left(\frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int \sin(x)\, \log(\sin(x))\,dx \qquad \int x \sqrt[3]{\frac{4-x^2}{x^2}}\,dx$$

Esercizio 4 Determinare le derivate delle seguenti funzioni

$$F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\,dt, \qquad G(x) = \left(\int_1^x e^{-t^2}\,dt\right)\left(\int_0^x \cos(t^3)\,dt\right).$$

Siano $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzione continua, $g, h : [0,1] \to [0,1]$ derivabili. Si provi che la seguente funzione integrale è derivabile e si calcoli la sua derivata

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\,ds.$$

Esercizio 5 Sia $f : [-a,a] \mapsto \mathbb{R}$ continua, dove $a > 0$. Si provi:

- se f è pari allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;
- se f è dispari allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;
- se f è pari allora $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ è dispari;
- se f è dispari allora $F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$ è pari per ogni scelta di $c \in [-a,a]$.

Esercizio 6 Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^2 \min\{x, x^{-1}\}\, dx \qquad \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \qquad \int_0^{2\pi} e^{-x}\,(\sin x - |\sin x|)\, dx \qquad \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(x+2)^2}\, dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x+|x|) + x^{56}\sin(x^{27})\, dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\, dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{2x+1}{(x-1)^2}\, dx$$

Esercizio 7 Si studino i grafici delle funzioni

$$F(x) = \int_0^x \frac{|s|}{1+|s|}\, ds, \qquad G(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^s}{|s|+1}\,.$$

Esercizio 8 Si determini il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato nel punto 0 della funzione integrale

$$\Phi(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt.$$

Quanto vale il polinomio di ordine 8 centrato nel punto 0 della stessa funzione?

Esercizio 9 Si trovi una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\int_0^x (\pi + \arctan x) f(t)\, dt = 1 - \cos x\,, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Esercizio 10 Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$(e^x + 1) f'(x) + e^x f(x) = 1 + \cos x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 11 Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\, dx = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi(x) \text{ continua in } [a, b].$$

Si provi che $f(x)$ è nulla.

Esercizio 12 Sia f integrabile in $[a, b]$. Dimostrare che

$$\left(⨍_a^b f(x)\, dx\right)^2 \le ⨍_a^b f^2(x)\, dx.$$

dove $⨍_a^b g(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx$.
(Suggerimento: si riscriva $⨍_a^b \left(f(x) - ⨍_a^b f(x)\, dx\right)^2 dx$ utilizzando la proprietá di linearitá.)

Esercizio 13 Sia $f \ge 0$ una funzione continua in $[0, 1]$ tale che $f(x_0) > 1$ per un opportuno $x_0 \in (0, 1)$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f^n(x)\, dx = +\infty.$$

Esercizio 14 Si dimostri con un opportuno criterio che il seguente l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+4)}{x^2}\,dx$$

è convergente e successivamente lo si calcoli.

Esercizio 15 Studiare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{(\sin x)^q}{x}\,dx$$

al variare di p e q in $\mathbb{R}$

Esercizio 16 Si studino i seguenti integrali impropri

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x\log x}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+9}\,dx$$

Esercizio 17 Si calcolino

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} e^{-t}\,dt, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt.$$

Esercizio 18 Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e quindi integrabile) e sia F una sua primitiva che verifica $F(3) = 7$. Allora

1. $F(x) = \int_3^x f(t)dt + 2$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. La funzione F verifica $|F(x) - F(y)| \leq 3|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (è Lipschitz di costante 3) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste almeno un punto $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - 7 = f(c)(x - 3)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - f(x) = k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
5. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - f(x)x = k$ per ogni $x \in [0, 10]$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 19 Sia $I = \int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$. Allora

1. $I = 1 - \frac{2}{e}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $I = 1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $I > 2e$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $I > 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 20 Sia $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$. Allora

1. $I = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}dx$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $I = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. $I = \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1)$ V F

4. $I < \sqrt{2}$ V F

Esercizio 21 Sia $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Allora

1. $I_1 = \log(1 + x^2)$ V F
2. $I_1 = \arctan(x)$ V F
3. $I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)}$ V F
4. $I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}I_1$ V F

Esercizio 22 Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 1, positiva e non identicamente nulla. Allora

1. Esiste $t > 0$ tale che $\int_t^{t^2} f(x)\,dx = 100$. V F
2. $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$. V F
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$. V F
4. $\int_0^1 f(3x)\,dx = 3\int_0^1 f(x)\,dx$. V F

Esercizio 23 Sia $f \in C^0([0, 1])$ con $f \geq 0$ e sia $M := \max f$.

1. Se $M > 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx = +\infty$ V F
2. Se $M = 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx = 1$ V F
3. Se $M < 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx = 0$ V F
4. $\displaystyle\int_0^1 f(|\sin x|)\,dx \leq M$. V F

Esercizio 24 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (secondo Riemann), e sia $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Allora:

1. Se x_0 è un punto di continuità per f, allora è un punto di derivabilità per F. V F
2. Se x_0 è un punto di derivabilità per F, allora è un punto di continuità per f. V F
3. F è integrabile (secondo Riemann). V F
4. Se f è derivabile con $|f'| \leq 2$ e $f(0) = 0$, allora $F(1) \geq -1$. V F

Esercizio 25

1. L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sin x}{x^3 + 2\sqrt{x}}$ è divergente $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Risulta $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{e+1}{e-1}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Sia $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua.
   L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Risulta $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{x\log x} = -\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$